УДК 621.695:622.276

Е.А. Кириченко

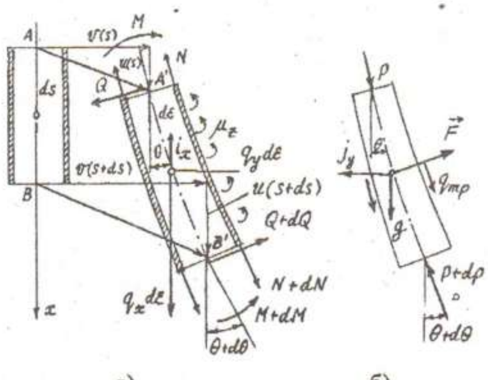
ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ В ПОДВИЖНОМ ДЕФОРМИРОВАННОМ УПРУГОМ ТРУБОПРОВОДЕ

У роботі отримані основні рівняння гідродинаміки рідини, що рухається у коливному деформованому пульпопроводі з обліком взаємного впливу параметрів внутрішньої течії пульпи та динаміки пружної конструкції трубопроводу у сполученій постановці.

В технике непрерывно растет интерес к задачам динамики систем с непрерывным переносом массы, в том числе и к исследованию изгибных колебаний подводных трубопроводов с протекающей по ним пульпой. Трубный став глубоководных гидроподъемов представляет собой сложную протяженную конструкцию, во внутренних полостях которой протекает рабочая жидкость, а сама конструкция совершает движение в толще морской воды.

Целью настоящей работы является изучение взаимного влияния параметров внутреннего течения пульпы и динамики упругой конструкции става, а также вывод основных уравнений гидродинамики с учетом силовых факторов, определяемых динамикой трубопровода в сопряженной постановке.

На рис.1 представлена схема сил и моментов, действующих на элемент трубы (а) и элемент жидкости в трубе (б).



а) б)

Рис. 4

Будем предполагать, что отклонение элементов трубопровода происходит в одной плоскости. Выберем следующую систему координат *Oxyz*, связанную с буксирующим транспортным средством. Начало координат поместим в узле крепления добычного трубопровода с приемным устройством корабля. Ось *Oy* направим горизонтально, в сторону, противоположную движению корабля, а ось Ox направим вертикально вниз. Ось Oz дополняет систему координат до правой (рис.1, а).

При стационарном движении транспортирующего средства со скоростью V_c противоположно оси y, трубопровод под действием силы тяжести и распределенных гидродинамических сил примет некоторую форму равновесия. Будем предполагать, что и при нестационарном движении изгиб става происходит в плоскости Oxy.

Для вывода уравнений движения элемента трубы, рассмотрим этот элемент в исходном и деформированном состоянии (рис.1, а). В качестве исходного состояния элемента трубопровода и трубопровода в целом выберем его «естественное» (ненапряженное и недеформированное) состояние при вертикальном расположении (такое состояние было бы у трубопровода, если бы на него не действовали никакие силы, в том числе и сила тяжести).

Положение каждого индивидуального сечения трубопровода будем характеризовать лагранжевой координатой, в качестве которой выберем его расстояние S вдоль оси x, измеренное от начала координат в «естественном» состоянии.

Исходная прямолинейная ось элемента AB после деформации искривляется. В балочном приближении считается, что поперечные сечения и после деформации остаются плоскими, но в общем случае после деформации поперечные сечения поворачиваются и перестают быть перпендикулярными изогнутой оси балки. Поперечные сечения остаются перпендикулярными к оси балки лишь в той мере, в которой допустимо пренебречь влиянием на прогиб поперечной силы, а также пренебречь силами инерции вращения элемента от изгиба, что обычно и принимается в инженерной практике и хорошо оправдывается при рассмотрении изгибных колебаний длинных стержней (балок). Такой подход представляет собой модель Эйлера-Бернулли, которая и будет принята в дальнейшем.

Обозначим продольное (вдоль оси x) и поперечное (вдоль оси y) перемещение лагранжева сечения S через $u(S,t)$ и $v(S,t)$, соответственно. На рис.1, а вектор $\overline{AA'}$ показывает перемещение центра лагранжева сечения с ко-ор-динатой S, а вектор $\overline{BB'}$ – перемещение центра сечения с координатой $S + dS$.

Для силовых факторов в сечении трубы введем обозначения: N – осевая сила; Q – поперечная сила; M – изгибающий момент (в плоскости xOy).

В естественном состоянии координаты центров рассматриваемых сечений составляют: $A(S,0)$, $B(S+dS,0)$; после деформации – $A(S+u(S,t), v(S,t)), B(S+dS+u(S+dS,t), v(S+dS,t)))$. Элемент, длина которого в естественном состоянии равна dS, после деформации будет иметь длину (длина дуги $A'B'$):

$$d\varepsilon = \sqrt{(1+u')^2 + v'^2}\, dS, \tag{1}$$

где обозначено: $u' = \dfrac{\partial u}{\partial S}$, $v' = \dfrac{\partial v}{\partial S}$.

Относительное продольное удлинение элемента dS после деформации равно:

$$e_S = \frac{d\varepsilon - dS}{dS} = \sqrt{(1+u')^2 + v'^2} - 1. \tag{2}$$

Расстояние по осям x и y между двумя лагранжевыми сечениями с координатами S и $S + dS$ после деформации соответственно составляет $dx = (1+u')dS, \quad dy = v'dS$.

Тангенс угла наклона θ деформированного элемента к оси x (для лагранжевого сечения S) равен:

$$tg\theta = \frac{v'}{1+u'}. \tag{3}$$

При малых перемещениях, пренебрегая квадратичными членами в (1), будем иметь:

$$d\varepsilon \approx \sqrt{1+2u'}\, dS \approx (1+u')dS. \tag{4}$$

Если осевая деформация элемента (2) мала и малы его углы наклона к оси x, то в выражение (4) позволительно пренебречь величиной u' по сравнению с единицей. В этом случае в первом приближении:

$$d\varepsilon \approx dS \quad \text{и} \quad tg\theta = v'. \tag{5}$$

Обозначим погонную массу трубопровода в естественном состоянии через m_o; тогда элемент длиной dS имеет массу $m_o dS$. После деформаций длина элемента становится равной $d\varepsilon$, однако его общая масса остается неизменной, равной $m_o dS$. Поэтому, проекции силы инерции от ускоренного движения элемента трубы на ось x и ось y будут соответственно равны:

$$i_X = -m_0 dS \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \; i_Y = -m_0 dS \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{6}$$

Что касается внешних и внутренних гидродинамических сил, действующих на рассматриваемый элемент трубы, то они пропорциональны фактической длине элемента $d\varepsilon$ в данный момент времени. Не детализируя пока состав и природу гидродинамических сил, проекции погонной нагрузки от этих сил на оси x и y обозначим q_X и q_Y. Тогда гидродинамические нагрузки на выделенный элемент будут составлять: $q_X \, d\varepsilon$ и $q_Y \, d\varepsilon$..

(Вообще говоря, на деформированный элемент за счет неравномерности распределения q_X и q_Y по длине действует и распределенный момент μ_z, однако, нетрудно показать, что его величина второго порядка малости).

Выделим элемент жидкости как показано на рис.1, б. Воспользуемся гидравлическим приближением, т.е. будем считать, что все гидродинамические параметры распределены равномерно по проходному сечению и зависят только от S и t. В действительности, при течении жидкости по искривленному каналу давление по поперечному сечению распределено неравномерно и его можно представить в виде двух слагаемых $p(S)$ и Δp, где $p(S)$ означает среднее давление в поперечном сечении, которое зависит только от S, а Δp означает неравномерную добавку за счет искривления оси канала. Наличие этой добавки приводит к образованию центростремительной силы, которая приложена со стороны стенок трубы к движущейся жидкости и заставляет поток поворачиваться вдоль канала. Неравномерность давления по периметру канала возникает и при ускоренном движении стенок канала.

Таким образом, в гидравлическом приближении на движущийся элемент жидкости со стороны стенок трубопровода действует сила трения $\bar{q}_{TP}$, которая направлена вдоль оси элемента, и нормальная сила $\overline{P}$, вызванная искривлением оси канала и его ускоренным движением.

Будем рассматривать уравнение движения жидкости для двух характерных состояний движения трубопровода: а) изогнутая равновесная форма трубопровода при транспортировке его с постоянной скоростью V_∞ и б) малые колебания относительно равновесного вертикального положения.

Уравнение неразрывности для течения жидкости в подвижном и деформирующемся трубопроводе в гидравлическом приближении формально имеет такой же вид, как и для течения в неподвижном трубопроводе, только при этом нуждается в уточнении понятия относительной скорости и смысла производных по времени.

Считаем, что каждое конкретное сечение самой трубы, характеризуемое лаг-ранжевой координатой S, перемещается по закону (для случая плоского движе-ния) $x = S + u(S,t)$, $y = v(S,t)$, т.е. компоненты его скорости равны $\dot{u}(S,t)$, $\dot{v}(S,t)$.

Скорость движения жидкости по отношению к сечению трубы с заданной лагранжевой координатой S будем называть относительной скоростью V_0. При этом, абсолютная скорость частиц жидкости будет равна:

$$\bar{V}_a = u\bar{x}^0 + v\bar{y}^0 + V_0\bar{s}^0 = \left(u\cos\theta + v\sin\theta + V_0\right)\bar{s}^0 + \left(-u\sin\theta + v\cos\theta\right)\bar{n}^0 =$$

$$= V_S\bar{s}^0 + V_n\bar{n}^0,$$

где: $\bar{s}^0$ и $\bar{n}^0$ – единичные векторы, направленные вдоль оси трубы и по нормали к ней; $V_S = u\cos\theta + v\sin\theta + V_0$ – компонента абсолютной скорости жидкости вдоль оси.

Поскольку элемент рассматривается как жидкий, то его реальная длина $d\varepsilon$ с течением времени может изменяться, но произведение $\rho\sigma d\varepsilon$, где σ – площадь проходного сечения трубопровода (живое сечение), остается неизменным, т.е. $\frac{d}{dt}(\rho\sigma\delta\varepsilon) = 0$, или $\frac{d}{dt}(\rho\sigma)\delta\varepsilon + \rho\sigma\frac{d}{dt}\delta\varepsilon\big|_t = 0$.

Обозначим длину жидкого элемента в момент времени t через $\delta\varepsilon_0$: $\delta\varepsilon\big|_t = \delta\varepsilon_0 = \varepsilon_2\big|_t - \varepsilon_1\big|_t$.

За время dt левое сечение элемента переместится и займет положение: $\varepsilon_1\big|_{t+dt} = \varepsilon_1\big|_t + V_S(\varepsilon_1, t)dt$, а правое сечение займет положение:

$$\varepsilon_2\big|_{t+dt} = \varepsilon_2\big|_t + V_S(\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_0, t)dt = \varepsilon_2\big|_t + \left(V_S(\varepsilon_1, t) + \frac{\partial V_S}{\partial\varepsilon}(\varepsilon_1, t)\delta\varepsilon_0\right)dt.$$

За промежуток времени dt элемент жидкости длиной $\delta\varepsilon_0$ превратится в элемент длиной $\delta\varepsilon = \varepsilon_2\big|_{t+dt} - \varepsilon_1\big|_{t+dt} = \delta\varepsilon_0 + \frac{\partial V_S}{\partial\varepsilon}dt\delta\varepsilon_0$ и следовательно производная $\frac{d}{dt}\delta\varepsilon$ будет равна $\frac{d}{dt}(\delta\varepsilon) = \frac{\partial V_S}{\partial\varepsilon}\delta\varepsilon_0$.

Таким образом, уравнение неразрывности запишется в виде:

$$\frac{d}{dt}(\rho\sigma) + \rho\sigma\frac{\partial V_S}{\partial\varepsilon} = 0. \tag{7}$$

Поскольку $\frac{d}{dt}(\rho\sigma)$ означает изменение величины $\rho\sigma$ по траектории жидких частиц, т.е. $\frac{d}{dt}(\rho\sigma) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\sigma)_\varepsilon + V_S\frac{\partial(\rho S)}{\partial\varepsilon}$, то из (7) получим: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\sigma)_\varepsilon + V_S\frac{\partial(\rho S)}{\partial\varepsilon} + \rho\sigma\frac{\partial V_S}{\partial\varepsilon} = 0$ или

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\sigma)_\varepsilon + \frac{\partial(\rho S V_S)}{\partial \varepsilon} = 0. \qquad (8)$$

Уравнение (8) по форме не отличается от аналогичного уравнение для движения в неподвижной трубе; отличие состоит лишь в том, что для деформируемой трубы сечение, для которого ε = const, само перемещается.

Движение жидкой среды наиболее целесообразно определять относительно фиксированных сечений трубы с лагранжевой переменной S. Для этого нужно перейти от производной по времени $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\varepsilon$ при фиксированном ε к производной $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_S$ при фиксированном σ, которые связаны зависимостью:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_S = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\varepsilon + \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_S, \qquad (9)$$

где $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_S$ означает скорость движения лагранжевого сечения вдоль оси трубы, т.е. $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_S = u\cos\theta + v\sin\theta$.

Кроме того, частные производные при фиксированном ε и при фиксированном S связаны между собой равенством:

$$\frac{\partial}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial S}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial S} = \sqrt{(1+u')^2 + v'^2}.$$

Таким образом, окончательно уравнение неразрывности в колеблющейся и деформирующейся трубе имеет следующий вид:

$$\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}\,\frac{\partial(\rho\sigma)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial S}(\rho\sigma V_0) + \rho\sigma\frac{\partial}{\partial S}\left(\dot{u}\cos\theta + \dot{v}\sin\theta\right) = 0.$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial t}$ означает производную при фиксированном S,

$$\frac{\partial}{\partial S}\left(\dot{u}\cos\theta + \dot{v}\sin\theta\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial S \partial t}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial t}\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial S \partial t}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial t}\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial t},$$

где, в свою очередь,

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{(1+u')^2+v'^2}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial S\partial t}\left(1+\frac{\partial u}{\partial S}\right)-\frac{\partial v}{\partial S}\frac{\partial^2 u}{\partial S\partial t}\right).$$

Как видно, это уравнение содержит в себе учет влияния деформации трубы и является в общем случае нелинейным. Член $\sqrt{(1+u')^2+v'^2}$ учитывает относительное удлинение трубы в процессе деформации, а последний член – переменную по длине трубы скорость движения лагранжевых сечений.

В случае, когда перемещения и деформации сечений малы, будем иметь (с точностью до величин второго порядка малости):

$$\frac{\partial}{\partial S}\left(u\cos\theta+v\sin\theta\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial S\partial t}.$$

В этом случае уравнение неразрывности примет вид:

$$\frac{\partial(\rho\sigma)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\sigma V_0)}{\partial S}\left(1-\frac{\partial u}{\partial S}\right)+\rho\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial S\partial t}=0.$$

Если в последнем уравнении перейти к производной $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\varepsilon$ при фиксированном ε (на основании равенства (9), то с принятой точностью получим уравнение:

$$\left(\frac{\partial(\rho\sigma)}{\partial t}\right)_\varepsilon+\frac{\partial(\rho\sigma)}{\partial S}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\sigma V_0)}{\partial S}\left(1-\frac{\partial u}{\partial S}\right)+\rho\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial S\partial t}=0, \tag{10}$$

которое приведено в статье [1].

Для написания уравнения импульсов учтем, что на выделенный элемент действуют по торцам силы давления, по боковой поверхности силы трения, нормальная сила P_y (сила взаимодействия трубы с жидкостью за счет искривления оси и ее движения) сила тяжести а также сила инерции равная $(\rho\sigma\delta\varepsilon)\bar{W}_a$, где $\bar{W}_a$ – абсолютное ускорение частицы, которая в данный момент t находится в точке с координатой ε. Поскольку мы рассматриваем движение по отношению к местной системой координат $\left(\bar{s}^0,\bar{n}^0\right)$, которая связана с лагранжевыми сечениями трубы, то $\bar{W}_a = \bar{W}_0 + 2\left(\bar{\omega}\times\bar{v}_0\right) + \frac{d\bar{V}_0}{dt}$, где $\bar{W}_0$ – ускорение начала локальной системы координат (т.е. ускорение лагранжевого сечения S). С учетом сказанного:

$$\bar{W}_0 = \left(\ddot{u}\cos\theta + \ddot{v}\sin\theta\right)\bar{s}^0 + \left(-\ddot{u}\cos\theta + \ddot{v}\sin\theta\right)\bar{n}_0 .$$

Величина $2\left(\bar{\omega}\times\bar{V}_0\right)$ – кориолисово ускорение жидких частиц за счет движения жидкости по отношению к элементу трубы, который в общем случае вращается. Угловая скорость $\bar{\omega}$ направлена перпендикулярно плоскости векторов $\left(\bar{s}^0, \bar{n}^0\right)$ и по величине равна $\frac{\partial\theta}{\partial t}$, так что $2\left(\bar{\omega}\times\bar{V}_0\right) = 2\frac{\partial\theta}{\partial t}V_0\bar{n}_0$.

Производная $\frac{d\bar{V}_0}{dt}$ означает относительное ускорение в связанной системе. Эта величина равна:

$$\frac{d\bar{V}_0}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V_0\bar{s}^0\right) = \frac{d\bar{V}_0}{dt}\bar{s}^0 + V_0\frac{d\bar{s}^0}{dt} = \frac{d\bar{V}_0}{dt}\bar{s}^0 + V_0^0\frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon}\bar{n}^0 ,$$

где $\frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon}$ – кривизна изогнутой оси. Здесь первый член означает касательное ускорение частиц жидкости а второй – центростремительное ускорение.

В свою очередь, полная производная равна $\frac{d\bar{V}_0}{dt} = \left(\frac{\partial V_0}{\partial t}\right)_\varepsilon + V_0\frac{\partial V_0}{\partial\varepsilon}$.

Составляя баланс сил в проекциях на ось $\bar{s}^0$ и ось $\bar{n}^0$, получим динамические уравнения движения жидкости в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial V_0}{\partial t}\right)_\varepsilon + V_0\frac{\partial V_0}{\partial\varepsilon} = g\sin\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\varepsilon} - 2\tau_{mp}\frac{1}{\rho R_{вн}} - \left(\ddot{u}\cos\theta + \ddot{v}\sin\theta\right)$$

$$V_0^2\frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon} + 2\dot{\theta}V_0 = -g\cos\theta - \frac{P}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon} + \frac{P}{\rho\sigma} + \ddot{u}\sin\theta - \ddot{v}\cos\theta$$

($R_{вн}$ – внутренний диаметр трубопровода).

Если перейти к производным $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_S$ и $\frac{\partial}{\partial S}$, то получим уравнения в виде:

$$\left(\frac{\partial V_0}{\partial t}\right)_S + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial V_0}{\partial S}\left(\dot{u}\cos\theta + \dot{v}\sin\theta\right)\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = $$
$$= g\cos\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} - \frac{2\tau_{mp}}{\rho R_{вн}} - \left(\ddot{u}\cos\theta + \ddot{v}\sin\theta\right), \tag{11}$$

$$V_0^2 \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon}\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} + 2\dot{\theta} V_0 + \left(-\dot{u}\sin\theta + \dot{v}\cos\theta\right) = -g\sin\theta - \frac{P}{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon}\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} +$$
$$+ \frac{P}{\rho\sigma} + \ddot{u}\sin\theta - \ddot{v}\cos\theta, \tag{12}$$

где $\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+u'\right)^2 + v'^2}}$.

В случае малых перемещений и деформаций трубопровода, эти уравнения (с точностью до членов первого порядка малости) будут иметь вид:

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial S}\left(1 - \frac{\partial u}{\partial S}\right) - \frac{\partial V_0}{\partial S}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial S}\left(1 - \frac{\partial u}{\partial S}\right) - \frac{2\tau_{mp}}{\rho R}; \tag{13}$$

$$\rho\sigma\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 v}{\partial S \partial t} + V_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}\right) = -\rho\sigma\frac{\partial^2 v}{\partial S^2} - \rho g\frac{\partial v}{\partial S} + P_y. \tag{14}$$

Если нестационарные колебания совершаются в плоскости xOz, то вместо уравнения (14) будем иметь аналогичное уравнение:

$$\rho\sigma\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial S \partial t}V_0 + V_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial S^2}\right) = -\rho\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial S^2} - \rho g\frac{\partial w}{\partial S} + P_z,$$

где на этот раз сила взаимодействия между трубой и жидкостью P лежит в плоскости xOz.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О.Г. Томан, Е.А. Кириченко. К расчету параметров сложно нагруженного трубопровода в сопряженной постановке. // Сб. научных трудов НГАУ №1, Днепр-ск, 1998, с. 105 – 112.